Corrección del examen de **Matemáticas** Selectividad Junio 2019

CASTILLA Y LEÓN

¡¡¡LO HEMOS VUELTO A CONSEGUIR!!!

La segunda edición del libro "Unas Matemáticas Para Todos" ha respondido al 100% de las preguntas de ambas opciones en el examen de Matemáticas de Selectividad 2019 de Castilla y León

Os dejo la corrección de mi genial compañero y co-autor de "Unas Matemáticas Para Todos"- Sergio Castro (Profesor10deMates).

Estamos MUY orgullosos de la ayuda que nuestro libro "Unas Matemáticas para Todos" ha prestado a esta comunidad y seguiremos trabajando en mejorarlo todo lo posible. Aprovechamos la ocasión para dar las gracias a todas aquellas personas que se han animado a estudiar con esta metodología. Vuestros mensajes de agradecimiento y apoyo a esta labor han sido muy importantes. La mejor recompensa es ser testigo de cómo conseguís mejorar vuestras notas y alcanzar todas vuestras metas académicas ☺

Academia Osorio continuará su enseñanza especializada en Química, Matemáticas y Biología, así como el lanzamiento en Septiembre de la siguiente edición de los libros "Una Química para Todos" , "Unas Matemáticas para Todos"y "Una Biología Para Todos" que incluirá todas las actualizaciones, novedades y mejoras para el curso 2019/2020 con el objetivo de hacerlo lo más completo posible y seguir cumpliendo su meta de obtener las mejores calificaciones, facilitando el entendimiento de estas materias.

www.unaquimicaparatodos.com

Atentamente, vuestros amigos y vecinos:

Pablo Osorio Lupiáñez // Sergio Castro // Eduardo Kayser

E1.- Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

a) Estudie la existencia y unicidad de soluciones según los valores del parámetro m. **(1 punto)**

b) Resuelva el sistema de ecuaciones anterior para el caso $m = 2$. **(1 punto)**

OPCIÓN A

E.1 Junio 2019 1A

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (2+4m) - (2m+4) = 2+4m-2m-4 = 2m-2$$

$|A| = 0 \Rightarrow 2m-2=0 \quad m=1$

Si $m \neq 1$ $|A| \neq 0$ $rg(A) = 3 = rg(A^*) = n^{\circ}$ Incog SCD existe solución y es única

Si $m = 1$ $|A| = 0$ $rg(A) = 2 \neq rg(A^*) = 3$ SI No tiene solución

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-2 = -1 \neq 0 \quad rg(A) = 2$$

¿$rg\ A^*$?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (6+6+16) - (8+6+12) = 28-26 = 2 \neq 0 \quad rg(A^*) = 3$$

Resolver para $m=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_1+F_2} \begin{array}{cccc} -2 & -2 & -4 & -8 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & -1 & -4 & -5 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_1+F_3} \begin{array}{cccc} -2 & -2 & -4 & -8 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \\ \hline 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} x+y+2z=4 \\ -y-4z=-5 \\ -2z=-2 \end{array} \rightarrow \boxed{z=1} \longrightarrow -y-4(1)=-5 \quad \boxed{y=1}$$

$x+y+2z=4 \quad \boxed{x = 4-1-2 = 1}$

$$\boxed{\begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{array}}$$

E2.- a) Calcular la ecuación del plano π que contiene a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$ y pasa por el punto $A = (1, \quad 2, \quad 1)$. **(1 punto)**

b) Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $\boldsymbol{B} = (2, \quad 1, \quad 2)$ y es perpendicular a las rectas $s_1 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$ y $s_2 \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$. **(1 punto)**

E.2 A

$\pi \begin{cases} \text{Contiene a } r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2} \\ A(1,2,1) \end{cases}$ $\quad P_r(1,1,1)$, $\vec{v}_r(2,3,2)$

$\vec{AP_r} = P_r - A = (1,1,1) - (1,2,1) = (0,-1,0)$

$$\pi \equiv \begin{cases} A(1,2,1) \\ \vec{v}_r(2,3,2) \\ \vec{AP_r}(0,-1,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = [-2(z-1)] - [-2(x-1)] =$$

$$= -2z+2+2x-2 = 2x-2z=0$$

$\boxed{\pi \equiv 2x-2z=0}$

$\boxed{\pi \equiv x-z=0}$

b) $r \begin{cases} B(2,1,2) \\ \text{y es } \perp \text{ a } s_1 \; \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2} \; ; \; \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2} \end{cases}$

$$\vec{v}_r = \vec{v}_{s1} \times \vec{v}_{s2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (4\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}) - (-2\vec{k} + 6\vec{i} + 4\vec{j}) =$$

$$= -2\vec{i} - 6\vec{j} + 8\vec{k} = (-2,-6,8)$$

$$r \equiv \begin{cases} B(2,1,2) \\ \vec{v}_r(-2,-6,8) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2-2t \\ y = 1-6t \\ z = 2+8t \end{cases}}$$

E. 2A (b)

También lo podemos hacer por planos auxiliares, es más largo, pero está igualmente bien.

$$\vec{n} = \vec{v}_{s1} \times \vec{v}_{s2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-2, -6, 8)$$

este vector se puede simplificar pero no lo voy a hacer.

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} B \\ \vec{v}_{s1} \\ \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & -6 & 8 \end{vmatrix} = [16(x-2) - 4(y-1) - 12(z-2)]$$

$$- [-4(z-2) - 12(x-2) + 16(y-1)] = (16x - 32 - 4y + 4 - 12z + 24)$$

$$- [-4z + 8 - 12x + 24 + 16y - 16] = [16x - 4y - 12z - 4] - [-12x + 16y - 4z + 16] =$$

$$= \boxed{28x - 20y - 8z - 20 = 0}$$

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} B \\ \vec{v}_{s2} \\ \vec{n} \end{cases} \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & -6 & 8 \end{vmatrix} = [24(x-2) - 4(y-1) + 6(z-2)] - [-6(z-2) - 12(x-2) - 8(y-1)] =$$

$$= [24x - 48 - 4y + 4 + 6z - 12] - [-6z + 12 - 12x + 24 - 8y + 8] =$$

$$= \boxed{36x + 4y + 12z - 100 = 0}$$

$$\boxed{r \equiv \begin{cases} 28x - 20y - 8z - 20 = 0 \\ 36 + 4y + 12z - 100 = 0 \end{cases}}$$

E3.- Dada la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$, para $x \in \mathbb{R}$.

a) Calcule sus máximos y mínimos relativos y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

b) Calcule el máximo y mínimo absolutos en el intervalo $[-2,2]$. **(1 punto)**

3A Mate CyL Junio 2019

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ $\quad$ Dom $f(x) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0$ $\quad$ $f(x)$ Continua en $\mathbb{R}$

$6x^2 + 6x - 12 = 0 \quad x^2 + x - 2 = 0 \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$

$f'(-3) = +$ $\quad$ $f'(0) = -$ $\quad$ $f'(2) = +$

-2 Max $\quad$ 1 min

Creciente $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

Decreciente $(-2, 1)$

Max relativo $(-2, 20)$

min relativo $(1, -7)$

$f''(x) = 12x + 6$

$f''(-2) = -$ Max

$f''(1) = +$ min

b) Max y min absoluto en $[-2, 2]$

Estudiamos las imágenes de los extremos del intervalo

$f(-2) = 20$

$f(2) = 4$

luego tenemos

Max relativo $(-2, 20)$ $\Rightarrow$ Max absoluto $(-2, 20)$

min relativo $(1, -7)$ $\Rightarrow$ mínimo absoluto $(1, -7)$

P $(2, 4)$

E4.- a) Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)-1}{x\,\text{sen}(x)}$. **(1 punto)**

b) Calcular el área encerrada por las gráficas de $f(x) = 4x$ y de $g(x) = x^3$ en el intervalo $[0,2]$, probando anteriormente que en dicho intervalo $f \geq g$. **(1 punto)**

4A Junio 2019 CyL Mate 2

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)-1}{x \cdot \text{sen}(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\text{sen}(x)}{1 \cdot \text{sen}(x) + x \cdot \cos x} = \left(\frac{0}{0}\right)$

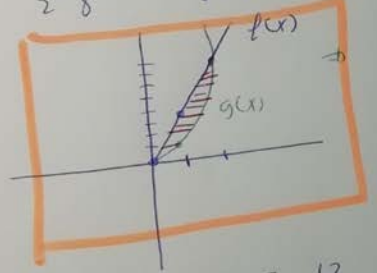
$\overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\cos(x)}{\cos x + 1 \cdot \cos x + x(-\text{sen}\, x)} = \frac{-1}{1+1} = \boxed{-1/2}$

b) $f(x) = 4x \quad g(x) = x^3 \quad [0,2]$

$f(x) = g(x) \quad 4x = x^3 \quad x^3 - 4x = 0 \quad x(x^2-4) = 0 \quad x=0,\ x=2,\ \cancel{x=-2}$

x	$f(x)=4x$
0	0
1	4
2	8

x	$g(x)=x^3$
0	0
1	1
2	8



$f(x) \geq g(x)$ en dicho intervalo

$A = \int_0^2 [f(x) - g(x)] = \int_0^2 (4x - x^3)\,dx = \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 =$

$= \left[\frac{4(2)^2}{2} - \frac{(2)^4}{4}\right] - \left[\frac{4 \cdot 0^2}{2} - \frac{0^4}{4}\right] = \boxed{4\ u^2}$

E5.- Las notas de Matemáticas II de 500 alumnos presentados al examen de EBAU tienen una distribución normal con media 6,5 y desviación típica 2.

a) Calcule la probabilidad de que un alumno haya obtenido más de 8 puntos. **(1 punto)**

b) ¿Cuántos alumnos obtuvieron notas menores de 5 puntos? **(1 punto)**

5.A Junio 2019 Mate 2 CyL

$n = 500$

$\mu = 6,5 \Rightarrow N(6,5\,,2)$

$\sigma = 2$

a) $P(X > 8) = P\left(Z > \frac{8-6,5}{2}\right) = P(Z > 0,75) = 1 - 0,7734 =$

$= \boxed{0,2266}$

b) $P(X < 5) = P\left(Z < \frac{5-6,5}{2}\right) = P(Z < -0,75) = 1 - 0,7734 =$

$= 0,2266 \Rightarrow 500 \cdot 0,2266 = \boxed{113 \text{ alumnos}}$

E1.- a) Encontrar los valores de k para que la matriz $A=\begin{pmatrix} k-1 & 2 & -2 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sea invertible. **(1 punto)**

b) Encontrar la inversa de A para $k=2$. **(1 punto)**

OPCIÓN B

$\boxed{\text{1B CyL Junio 2019}}$

$$A=\begin{pmatrix} k-1 & 2 & -2 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} k-1 & 2 & -2 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=[(k-1)(k-2)+2]-[-2(k-2)]=$$

$$=[k^2-2k-k+2+2]-[-2k+4]=k^2-k$$

$$k^2-k=0 \qquad k(k-1)=0 \begin{cases} k=0 \\ k-1=0 \quad k=1 \end{cases}$$

Si $k\neq 0$ y $k\neq 1$ $|A|\neq 0$ existe A^{-1}

Si $k=0$ o $k=1$ $|A|=0$ No existe A^{-1}

b) A^{-1} si $k=2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(2)-(0)=2\neq 0$ existe A^{-1}

2) $$\operatorname{adj}(A)=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3) $$\operatorname{adj}(A^t)=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

4) $$\boxed{A^{-1}=\frac{\operatorname{adj}(A^t)}{|A|}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

E2.- Sean la recta $r \equiv \frac{x-1}{m} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{4}$ y el plano $\pi \equiv x + y + kz = 0$.

Encontrar m y k para que:

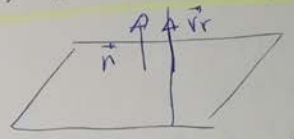
a) La recta r sea perpendicular al plano $\boldsymbol{\pi}$. **(1 punto)**

b) La recta r esté contenida en el plano $\boldsymbol{\pi}$. **(1 punto)**

2ºB CyL Junio 2016

$r \equiv \frac{x-1}{m} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{4}$ $\quad \pi \equiv x+y+kz=0$ $\quad$ ¿m y k?

a) la recta r sea perpendicular a π



$\vec{n}(1,1,k)$

$\vec{v}_r(m,2,4)$ $\quad P_r(1,1,1)$

Para que r sea $\perp$ a π, sus vectores tienen que ser paralelos (proporcionales)

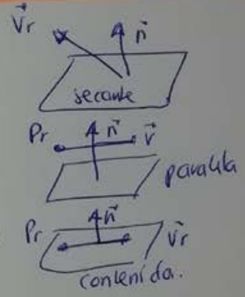
$\vec{v}_r \parallel \vec{n} \Rightarrow \begin{matrix} \vec{v}_r(m, 2, 4) \\ \vec{n}(1, 1, k) \end{matrix} \Rightarrow \frac{m}{1} = \frac{2}{1} = \frac{4}{k} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} m=2 \\ k=2 \end{matrix}}$

b) r contenida en π.

Repasemos posiciones relativas entre recta y plano $\Rightarrow$

$\vec{v}_r \cdot \vec{n} \neq 0$

$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \begin{cases} P_r \notin \pi \\ P_r \in \pi \end{cases}$



luego tenemos las 2 condiciones $\begin{cases} \vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \\ P_r \in \pi \end{cases}$

$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \quad (m, 2, 4) \cdot (1, 1, k) = m + 2 + 4k = 0 \quad \boxed{m + 4k = -2}$

$P_r \in \pi \Rightarrow \quad (1) + (1) + k(1) = 0 \quad \boxed{k = -2}$

$m + 4k = -2 \qquad m + 4(-2) = -2 \qquad m - 8 = -2 \quad \boxed{m = 6}$

E3.- Sea el polinomio $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ del cual sabemos que $f(0) = 1, f(1) = 0$ y que tiene extremos relativos en $x = 0$ y $x = 1$. Calcular a, b, c y d.

(2 puntos)

3B Junio 2016 Mate II CyL

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad f(0) = 1 \qquad f(1) = 0$

extremos en $x = 0$ y $x = 1$ $\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f(0) = 1 \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 1 \qquad \boxed{d = 1}$

$f(1) = 0 \Rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 0 \qquad \boxed{a + b + c + 1 = 0}$ (1)

$f'(0) = 0 \quad 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \qquad \boxed{c = 0}$

$f'(1) = 0 \quad 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 0 \qquad \boxed{3a + 2b + c = 0}$ (2)

(1) $a + b + 0 + 1 = 0 \qquad a + b = -1 \qquad \boxed{a = -1 - b}$

(2) $3a + 2b = 0 \qquad 3a + 2b = 0 \qquad 3(-1 - b) + 2b = 0$

$-3 - 3b + 2b = 0 \qquad -3 - b = 0 \qquad \boxed{b = -3}$

$\boxed{a = -1 - b = -1 + 3 = 2}$

E4.- a) Sea $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+1}$. Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. **(1 punto)**

b) Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{3\cos(x)-3}$. **(1punto)**

4B Junio 2019 CyL Matemáticas

$f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+1}$ ¿A? eje OX $x=0$ y $x=2$

$f(x)=0 \quad \frac{2x+3}{x^2+3x+1} = 0 \quad x = \cancel{-3/2} \notin (0,2)$

$$A = \int_0^2 \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,dx = \left[\ln|x^2+3x+1|\right]_0^2 = \ln\left[(2)^2+3(2)+1\right] - \ln(0^2+3\cdot 0+1) =$$

$$= \ln(11) - \ln(1) = \boxed{\ln(11)\ u^2}$$

Realizo la integral a parte:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,dx = \ln|x^2+3x+1|$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot \mathrm{sen}(x)}{3\cos(x)-3} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1\cdot \mathrm{sen}\,x + x\cdot\cos x}{-3\,\mathrm{sen}(x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + 1\cdot\cos x + x(-\mathrm{sen}\,x)}{-3\cos(x)} = \frac{1+1}{-3} = \boxed{-2/3}$$

E5.-En una competición de tiro olímpico hay 10 rifles, 4 con visor telescópico y 6 sin él. La probabilidad de que un tirador haga blanco con un rifle con visor telescópico es 0,95 y sin él es de 0,65.

a) Halla la probabilidad de hacer blanco escogiendo un rifle al azar. **(1 punto)**

b) Si el tirador hace blanco. ¿Es más probable que haya disparado con un rifle con visor telescópico o sin él? **(1 punto)**

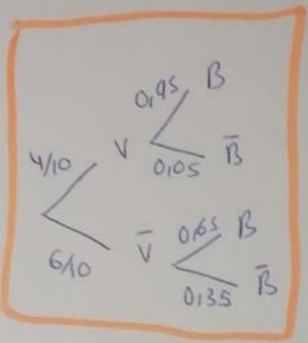
CyL Junio 2019 E.5B

$V \to$ "Visor"

$\bar{V} \to$ "Sin visor"

$B \to$ "hacer blanco"

$\bar{B} \to$ "No hacer blanco"



a) $P(B) = P(V) \cdot P(B/V) + P(\bar{V}) \cdot P(B/\bar{V}) =$

$= \frac{4}{10} \cdot 0{,}95 + \frac{6}{10} \cdot 0{,}65 = \boxed{0{,}77}$

b) $P(V/B) = \frac{P(V \cap B)}{P(B)} = \frac{4/10 \cdot 0{,}95}{0{,}77} = \boxed{0{,}49}$

$P(\bar{V}/B) = \frac{P(\bar{V} \cap B)}{P(B)} = \frac{6/10 \cdot 0{,}65}{0{,}77} = \boxed{0{,}51}$

Si el tirador hace blanco, es más probable que haya disparado con un rifle sin visor.