Corrección del examen de Matemáticas Selectividad Junio 2019 COMUNIDAD VALENCIANA

Aunque ha sido un examen de elevada dificultad, esperamos y deseamos que os haya salido bien. Siempre da impotencia que te toque un examen bastante más complicado de lo esperado. Pero sois más duros que un enlace covalente y yo confío en que, os haya salido bien o mal, sigáis luchando por disfrutar de las matemáticas.

Os dejo la corrección de mi genial compañero y co-autor de "Unas Matemáticas Para Todos"- Sergio Castro (Profesor10deMates).

Estamos MUY orgullosos de la ayuda que nuestro libro "Unas Matemáticas para Todos" ha prestado a esta comunidad y seguiremos trabajando en mejorarlo todo lo posible. Aprovechamos la ocasión para dar las gracias a todas aquellas personas que se han animado a estudiar con esta metodología. Vuestros mensajes de agradecimiento y apoyo a esta labor han sido muy importantes. La mejor recompensa es ser testigo de cómo conseguís mejorar vuestras notas y alcanzar todas vuestras metas académicas ☺

Atentamente, vuestros amigos y vecinos:

Pablo Osorio Lupiáñez // Sergio Castro // Eduardo Kayser

OPCIÓN A

Problema A.1. Se dan la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$, que depende del parámetro real a, y una matriz cuadrada B de orden 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3} I - 2B$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro a y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a = 1$. (2+2 *puntos*)

b) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $a = -1$. (3 *puntos*)

c) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1} = mB + nI$. (3 *puntos*)

Problema A.2. Consideramos en el espacio las rectas $r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ y $s: x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La ecuación del plano que contiene las rectas r y s. (3 *puntos*)

b) La recta que pasa por $P = (0, -1, 2)$ y corta perpendicularmente a la recta r. (4 *puntos*)

c) El valor que deben tener los parámetros reales a y b para que la recta s esté contenida en el plano $\pi: x - 2y + az = b$. (3 *puntos*)

Problema A.3. Se considera la función $f(x) = xe^{-x^2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. (3 *puntos*)

b) La representación gráfica de la curva $y = f(x)$. (2 *puntos*)

c) El valor del parámetro a para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[0,1]$ a la función $g(x) = f(x) + ax$. (1 *punto*)

d) El valor de las integrales indefinidas $\int f(x)\,dx$, $\int xe^{-x}\,dx$. (4 *puntos*)

A.1 Op A Comunidad Valenciana Junio 2019

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{vmatrix} = [(a+1)\cdot a + \overbrace{a(-2)(a-1)}^{-2a}] - [\overbrace{a(a+1)(-3)}^{a^2+a} + 2(a-1)] =$$

$$=[a^2+a-2a^2+2a] - [-3a^2-3a+2a-2] = a^2-2a^2+3a^2\ a+2a+3a-2a+2$$

$$= 2a^2+4a+2 = 0 \qquad a = \frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 2\cdot 2}}{2\cdot 2} = \frac{-4\pm\sqrt{0}}{4} \to \frac{-4}{4} = \boxed{-1}$$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } a \neq -1 \quad |A| \neq 0 \quad rg(A) = 3 \\ \text{Si } a = -1 \quad |A| = 0 \quad rg(A) = 2 \end{array}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \quad rg(A) = 2$

También piden $|2A^{-1}|$ para $a = 1$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2+0+0)-(-6+0+0) = 8 \Rightarrow |A| = 8$$

$$\boxed{|2A^{-1}| = 2^3|A^{-1}| = 2^3 \cdot \frac{1}{|A|} = 2^3 \cdot \frac{1}{8} = 8/8 = 1}$$

b) $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ para $a = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+0y-1z=-1 \\ -2x+0y+2z=2 \\ -3x-2y-z=0 \end{cases}$$

$\xrightarrow{2E_1+E_2}$
$$\begin{array}{r} +2x \quad -2z=-2 \\ -2x \quad +2z=2 \\ \hline 0=0 \end{array}$$

$$\begin{cases} x \quad -z=-1 \\ \quad 0=0 \\ -3x\ -2y\ -z=0 \end{cases} \qquad \begin{array}{r} 3E_1+E_2 \\ 3x \quad -3z=-3 \\ -3x-2y-z=0 \\ \hline -2y-4z=-3 \end{array} \qquad \begin{cases} x \quad -z=-1 \\ \quad 0=0 \\ -2y-4z=-3 \end{cases}$$

$\boxed{\begin{array}{c} rg(A)=2=rg(A^*) \neq n\text{. Incog} \\ SCI \end{array}}$

$\boxed{z=\lambda} \qquad -2y-4z=-3 \qquad -2y=-3+4z \qquad 2y=+3-4z \qquad \boxed{y = \frac{3-4\lambda}{2}}$

$x-z=-1 \qquad x-\lambda=-1 \qquad \boxed{x=-1+\lambda}$

$$\boxed{\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=\dfrac{3-4\lambda}{2} \\ z=\lambda \end{cases}}$$

A.1 Op A Comunidad Valenciana Junio 2019

c) $\boxed{B^2 = 1/3\, I - 2B}$

$B^2 + 2B = 1/3\, I$

$3B^2 + 6B = I$

$B\,(3B + 6I) = I$ cómo $B \cdot B^{-1} = I \Rightarrow \boxed{B^{-1} = 3B + 6I}$

Queda comprobado que B es invertible.

luego $\boxed{m = 3}$ y $\boxed{n = I}$

Problema A.2 Comunidad Valenciana Junio 2019

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases} \qquad s \equiv x = y + 1 = \frac{z-2}{2} \qquad \begin{matrix} P_s(0,-1,2) \\ \vec{V}_s(1,1,2) \end{matrix}$$

1º Paso r a forma paramétrica:

$$r \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{r} -2E_1 + E_2 \to 0 \\ \hline -2x + 2y - 6 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \\ \hline 2y - z - 3 = 0 \end{array} \qquad \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2y - z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = \lambda}$$

$$2y - z - 3 = 0 \quad 2\lambda - z - 3 = 0 \quad -z = 3 - 2\lambda \quad \boxed{z = -3 + 2\lambda}$$

$$x - y + 3 = 0 \Rightarrow x - \lambda + 3 = 0 \quad \boxed{x = -3 + \lambda}$$

$$\boxed{r \equiv \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{cases}} \Rightarrow \begin{matrix} P_r(-3,0,-3) \\ \vec{V}_r(1,1,2) \end{matrix}$$

a) Ecuación del plano que contiene a las rectas, es ecuación de un plano conocido un punto y 2 vectores directores, podemos coger el punto que queramos entre Pr y Ps, yo me decanto por Ps al ser un dato del problema.

$$\pi \equiv \begin{cases} P_s \\ \vec{V}_s \\ \vec{V}_r \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-0 & y+1 & z-2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

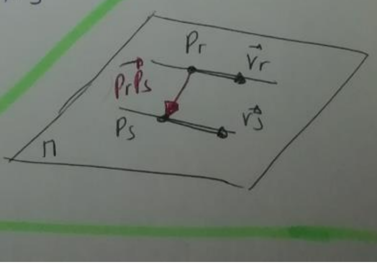
el determinante da cero, esto es porque las rectas son paralelas, tienen el mismo vector director, luego solo me sirve uno entre $\vec{V}_r$ y $\vec{V}_s$, como necesito otro vector cogemos el $\overrightarrow{P_rP_s} = P_s - P_r = (3,-1,5)$

luego

$$\pi \equiv \begin{cases} P_s \\ \vec{V}_s \\ \overrightarrow{P_rP_s} \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-0 & y+1 & z-2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = [5(x-0) + 6(y+1) - 1(z-2)] - [3(z-2) - 2(x-0) + 5(y+1)] =$$

$$= [5x + 6y + 6 - z + 2] - [3z - 6 - 2x + 5y + 1] =$$

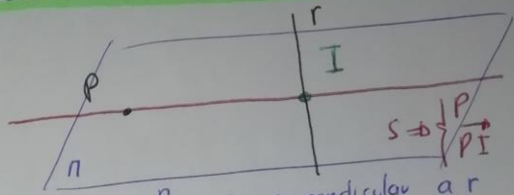
$$\pi \equiv \boxed{7x + y - 4z + 9 = 0}$$



b) Recta que pasa por $P(0,-1,2)$ y corta perpendicularmente a r

$$r \equiv \begin{cases} x = -3+\lambda \\ y = \lambda \\ z = -3+2\lambda \end{cases}$$

Este problema es una variación del clásico "simétrico de un punto respecto a una recta"



① Calculamos el plano π que contiene a P y es perpendicular a r

$$\pi \equiv \begin{cases} P(0,-1,2) \\ \vec{n} = \vec{v}_r = (1,1,2) \end{cases} \Rightarrow 1x+1y+2z+D=0$$

$$1(0)+1(-1)+2\cdot 2+D=0$$

$$-1+4+D=0 \quad \boxed{D=-3}$$

$$\boxed{\pi \equiv x+y+2z-3=0}$$

② Calculamos el punto intersección entre r y $\pi \Rightarrow I$

$$(-3+\lambda)+\lambda+2(-3+2\lambda)-3=0$$

$$-3+\lambda+\lambda-6+4\lambda-3=0 \qquad 6\lambda-12=0 \quad \boxed{\lambda = 12/6 = 2}$$

luego $I \equiv \begin{cases} x = -3+2 = -1 \\ y = 2 \\ z = -3+2(2) = +1 \end{cases}$ $\boxed{I(-1,2,+1)}$

luego

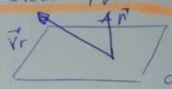
$$s \equiv \begin{cases} P = (0,-1,2) \\ \vec{PI} = I-P = (-1,3,-1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{s \equiv \begin{cases} x = 0-t \\ y = -1+3t \\ z = +2-t \end{cases}}$$

c) Valores de a y b para que s esté contenida en el plano

$\Pi: x-2y+az=b \qquad s \quad x=y+1=\frac{z-2}{2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}(1,-2,a) \\ \vec{v_s}(1,1,2) \end{cases} \quad P_s(0,-1,2)$

Vamos a repasar posición relativa entre recta y plano

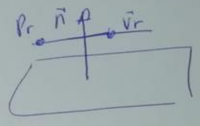
Si $\vec{v_s}\cdot\vec{n}\neq 0$



recta corta al plano

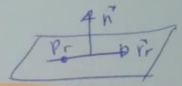
Si $\vec{v_s}\cdot\vec{n}=0$ $\begin{cases} P_s\notin\Pi \\ P_s\in\Pi \end{cases}$

$P_s\notin\Pi$:



recta paralela al plano

$P_s\in\Pi$:



recta contenida en el plano

Luego sabemos las 2 condiciones para calcular a y b

$\vec{v_s}\cdot\vec{n}=0$ y $P_s\in\Pi$.

1º $\vec{v_s}\cdot\vec{n}=(1,1,2)(1,-2,a)=1-2+2a=-1+2a=0 \quad 2a=1 \quad \boxed{a=1/2}$

2º $P_s\in\Pi$

$x-2y+az=b \Rightarrow 0-2(-1)+\frac{1}{2}\cdot 2=b$

$2+1=b \quad \boxed{b=3}$

Problema A.3 C V Junio 2019

$f(x) = x \cdot e^{-x^2}$

a) Asíntotas crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos.

$f(x) = x \cdot e^{-x^2}$ Dom $f(x) = \mathbb{R}$

Recordatorio
$e^{\infty} = \infty$
$e^{0} = 1$
$e^{-\infty} = 0$

AV → No tiene porque Dom $f(x) = \mathbb{R}$

AH
$$y = \lim_{x \to \infty} x \cdot e^{-x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L'H}{=}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2x e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0 \,//$$

$$y = \lim_{x \to -\infty} x \cdot e^{-x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L'H}{=}$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2x e^{x^2}} = \frac{1}{-\infty \cdot \infty} = 0 \,//$$ $\boxed{y = 0 \text{ AH}}$

AO Como tiene A.H no tiene AO

$f(x) = x \cdot e^{-x^2}$

$f'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2} \cdot [1 - 2x^2] = 0$

$e^{-x^2} \neq 0$ No tiene S∅

$1 - 2x^2 = 0$ $\quad 2x^2 = 1$ $\quad x = \sqrt{1/2} = \pm\sqrt{2}/2 \simeq \pm 0{,}707$

$f'(-1) = -$ $\quad f'(0) = +$ $\quad f'(1) = -$

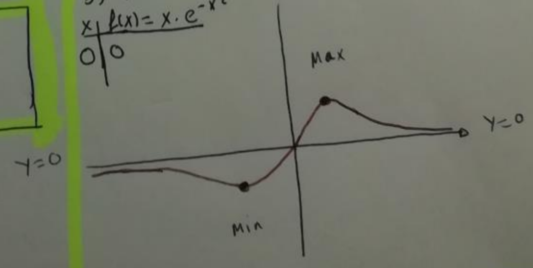
↘ $-\sqrt{2}/2$ ↗ $+\sqrt{2}/2$ ↘

min relativo $\quad$ Max relativo

Min relativo $(-\sqrt{2}/2,\ 0{,}43)$
Max relativo $(\sqrt{2}/2,\ -0{,}43)$

b) representación gráfica

x	$f(x) = x \cdot e^{-x^2}$
0	0



6

A.3 CV Junio 2019

c) El valor de a para que se pueda aplicar el T de Rolle en el intervalo $[0,1]$ a la función $g(x) = f(x) + ax$

$f(x) = x \cdot e^{-x^2}$; luego $\boxed{g(x) = x \cdot e^{-x^2} + ax}$

Recordemos el teorema de Rolle

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ continua en } [a,b] \\ f(x) \text{ derivable en } (a,b) \\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{existe al menos un } c \in (a,b) \ / \ f'(c) = 0$$

$\hookrightarrow$ Para poder aplicar Rolle $g(x)$ debe cumplir estas 3 condiciones en $[0,1]$

$g(x)$ continua en $[0,1]$ por ser suma de funciones continuas

$g(x)$ derivable en $(0,1)$ por ser suma de funciones derivables

$g(0) = 0 \cdot e^{-0^2} + a \cdot 0 = 0$

$g(1) = 1 \cdot e^{-1} + a$

luego como $g(0) = g(1)$

$e^{-1} + a = 0$ $\boxed{a = -e^{-1} = \frac{-1}{e}}$

Problema A.3 CV Junio 2019

d) $\int x \cdot e^{-x^2} dx$; $\int x \, e^{-x} dx$

d1) $\int x \cdot e^{-x^2} dx = \frac{1}{-2} \int -2x \cdot e^{-x^2} = \boxed{\frac{-1}{2} e^{-x^2} + C}$

d2) $\int x \cdot e^{-x} dx \Rightarrow$ Por Partes $\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$ ALPES

$\int x \cdot e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} + \int + e^{-x} = \boxed{-x\,e^{-x} - e^{-x} + C}$

$u = x \quad du = 1\,dx$

$dv = e^{-x} \quad v = \int e^{-x} = -e^{-x}$

OPCIÓN B

Problema B.1. Se da el sistema $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = \alpha \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de α para los que el sistema es compatible y los valores de α para los que el sistema es incompatible. (*4 puntos*)

b) Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible. (*4 puntos*)

c) La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente. (*2 puntos*)

Problema B.2. Sea π el plano de ecuación $9x + 12y + 20z = 180$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 4 unidades de π. (*4 puntos*)

b) Los puntos A, B y C intersección del plano π con los ejes OX, OY y OZ y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (*4 puntos*)

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen O de coordenadas y los puntos A, B y C. (*2 puntos*)

Problema B.3. Las coordenadas iniciales de los móviles A y B son (0, 0) y (250, 0), respectivamente, siendo 1km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos (1, 0) y (0, 1).

El móvil A se desplaza sobre el eje OY desde su posición inicial hasta el punto $\left(0, \frac{375}{2}\right)$ con velocidad de 30 km/h y, simultáneamente, el móvil B se desplaza sobre el eje OX desde su posición inicial hasta el origen de coordenadas con velocidad de 40 km/h.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La distancia $f(t)$ entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo t en horas desde que comenzaron a desplazarse. (*2 puntos*)

b) El tiempo T que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f a lo largo del trayecto. (*4 puntos*)

c) Los valores de t para los que la distancia de los móviles es máxima y mínima durante su desplazamiento y dichas distancias máxima y mínima. (*4 puntos*)

Problema B.1 CV Junio 2019

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ 3x+4y+5z=5 \\ 7x+9y+11z=\alpha \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & \alpha \end{array}\right)$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{vmatrix}=(44+35+27)-(28+45+33)=106-106=0 \quad rg(A)<3$$

Cogemos un determinante 2x2 de A

$$\left.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=4-3=1\right\} \Rightarrow rg(A)=2$$

¿$rg\ A^*$?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & \alpha \end{vmatrix}=(4\alpha+35+108)-(112+45+3\alpha)=\alpha-14=0 \quad \alpha=14$$

Si $\alpha\neq 14$ $rg(A^*)=3$

Si $\alpha=14$ $rg(A^*)=2$

luego

Si $\alpha\neq 14$ $rg(A)=2\neq rg(A^*)$ SI

Si $\alpha=14$ $rg(A)=2=rg(A^*)\neq$ nº Incog SCI

Resolvemos para $\alpha=14$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & 14 \end{array}\right) \quad \xrightarrow{-3E_1+E_2} \quad \begin{array}{cccc} -3 & -3 & -3 & -12 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ \hline 0 & 1 & 2 & -7 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 7 & 9 & 11 & 14 \end{array}\right) \quad \xrightarrow{-7E_1+E_3} \quad \begin{array}{cccc} -7 & -7 & -7 & -28 \\ 7 & 9 & 11 & 14 \\ \hline 0 & 2 & 4 & -14 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -14 \end{array}\right) \quad \xrightarrow{-2E_2+E_3} \quad \begin{array}{cccc} 0 & -2 & -4 & +14 \\ 0 & 2 & 4 & -14 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} x+y+z=4 \\ y+2z=-7 \end{array}$$

Si $\boxed{z=\lambda}$ $\quad x-7-2\lambda+\lambda=4 \quad \boxed{x=11+\lambda}$

$\boxed{y=-7-2\lambda}$

$$\boxed{\begin{cases} x=11+\lambda \\ y=-7-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

c) Discutir la compativilidad al cambiar el 11 por otro cualquiera.

Como es otro cualquiera, será un parámetro y sustituimos el 11 de la 7 de la tercera ecuación por a y discutimos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & a & \alpha \end{array}\right) \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & a \end{vmatrix} = (4a+35+27) - (28+45+3a) =$$

$$= a - 11 \qquad a - 11 = 0 \qquad a = 11$$

$$\boxed{\text{Si } a \neq 11 \quad |A| \neq 0 \quad rg(A) = 3 = rg(A^*) = n^{\circ}\ \text{Incog SCD}}$$

Si $a = 11$ lo hicimos en el apartado a) No hay que volver a hacerlo.

$\boxed{B.2 \quad C.V \text{ Junio } 2018}$

$\pi \;\; 9x+12y+20z=180$

los planos paralelos a π tendrán en mismo normal $\vec{n}=(9,12,20)$

y serán de la forma $\alpha \; \boxed{9x+12y+20z+D=0}$

Ahora vamos a coger un punto cualquiera de π

$$\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \Rightarrow \pi \;\; 9\cdot0+12\cdot0+20z=180 \quad z=\frac{180}{20}=9 \quad \boxed{P_\pi\,(0,0,9)}$$

la distancia de este punto P_π al plano α tiene que ser de 4 unidades

$$d(P_\pi,\alpha)=\frac{|9\cdot0+12\cdot0+20\cdot9+D|}{\sqrt{(9)^2+(12)^2+(20)^2}}=\frac{|180+D|}{\sqrt{625}}=\frac{|180+D|}{25}=4$$

$$\frac{|180+D|}{25}=4 \quad \begin{cases} \dfrac{180+D}{25}=4 & 180+D=4\cdot25 \quad D=100-180=\underline{\underline{-80}} \\ \dfrac{180+D}{25}=-4 & 180+D=-4\cdot25 \quad D=-100-180=\underline{\underline{-280}} \end{cases}$$

luego $\boxed{\begin{matrix} \alpha_1 \equiv 9x+12y+20z-80=0 \\ \alpha_2 \equiv 9x+12y+20z-280=0 \end{matrix}}$

(b) A, B, C puntos de intersección del plano π con OX, OY, OZ y el ángulo $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$

$\pi: 9x+12y+20z=180$

$$A\begin{cases}\pi & 9x+12y+20z=180\\ \text{EJE OX} \Rightarrow & y=0,\ z=0\end{cases} \qquad 9x=180 \quad x=\frac{180}{9}=20 \qquad \boxed{A(20,0,0)}$$

$$B\equiv\begin{cases}\pi & 9\cdot0+12y+20\cdot0=180\\ \text{EJE OY} \Rightarrow & x=0,\ z=0\end{cases} \qquad y=\frac{180}{12}=15 \qquad \boxed{B(0,15,0)}$$

$$C\equiv\begin{cases}\pi & 9\cdot0+12\cdot0+20z=180\\ \text{EJE OZ} & \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\end{cases} \qquad z=9 \qquad \boxed{C(0,0,9)}$$

$$\vec{v}_1=\vec{AB}=B-A=(0,15,0)-(20,0,0)=(-20,15,0)=\boxed{(-20,15,0)}$$

$$\vec{v}_1=\vec{AC}=C-A=(0,0,9)-(20,0,0)=\boxed{(-20,0,9)}$$

$$\cos\alpha=\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}{|\vec{v}_1|\,|\vec{v}_2|}=\frac{400}{25\cdot\sqrt{481}} \qquad \alpha=\arccos\frac{400}{25\sqrt{481}}=\boxed{43{,}15^\circ}$$

$$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=(-20,15,0)\cdot(-20,0,9)=400$$

$$|\vec{v}_1|=\sqrt{(-20)^2+15^2+0^2}=\sqrt{625}=25$$

$$|\vec{v}_2|=\sqrt{(-20)^2+0^2+9^2}=\sqrt{481}$$

c) Volumen del tetraedro formado por O, A, B, C

$$\boxed{V=\frac{1}{6}[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AO}]}$$

$\vec{AB}=(-20,15,0)$

$\vec{AC}=(-20,0,9)$

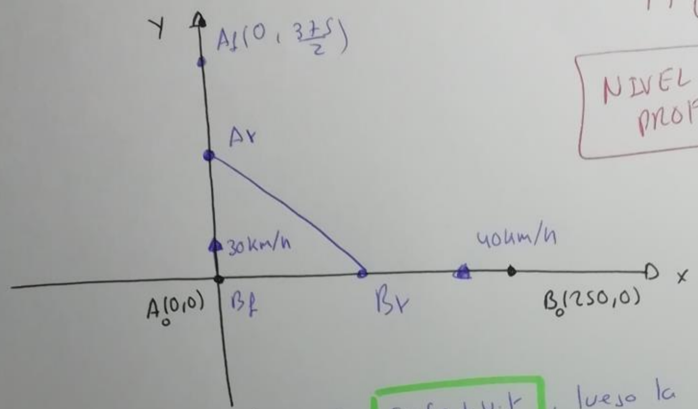
$\vec{AO}=(-20,0,0)$

$$[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AO}]=\begin{vmatrix}-20 & 15 & 0\\ -20 & 0 & 9\\ -20 & 0 & 0\end{vmatrix}=2700$$

$$\boxed{V=\frac{2700}{6}=450\,u^3}$$

↑↑ FULL ↑↑

NIVEL PROFESIONAL



recuerda de cinemática que $\boxed{s = s_0 + v \cdot t}$, luego la ecuación de la posición del móvil A será:

$\boxed{Y = 0 + 30t}$ se pone Y porque se mueve en dirección del eje Y y la ecuación de posición del móvil B:

$\boxed{X = 250 - 40t}$ se pone la velocidad negativa porque su sentido es negativo. Entonces el punto A y B en función del tiempo serán

$\boxed{A_t(0, 30t)}$ $\boxed{B_t(250-40t, 0)}$ y como la distancia entre 2 puntos es el módulo del vector que los define.

$\vec{AB} = B - A = (250-40t, 0) - (0, 30t) = (250-40t, -30t)$

$|\vec{AB}| = \sqrt{(250-40t)^2 + (-30t)^2} = \sqrt{62500 - 20000t + 1600t^2 + 900t^2}$

$$\boxed{f(t) = \sqrt{2500t^2 - 20000t + 62500}}$$

ⓑ El móvil A va desde $(0,0)$ a $(0, \frac{375}{2})$ a $v = 30\,km/h$

luego tardará $t = \frac{s}{v} = \frac{375/2}{30} = \boxed{6,25\,h}$

El móvil B va desde $(250,0)$ a $(0,0)$ a $v = 40\,km/h$

luego tardará $t = \frac{s}{v} = \frac{250}{40} = \boxed{6,25\,h}$

$f = \sqrt{2500t^2 - 20.000t + 62500}$

$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{2500t^2 - 20.000t + 62500}} \cdot (5000t - 20000) = 0$

$5000t - 20000 = 0 \qquad t = \frac{20.\cancel{000}}{5\cancel{000}} = \boxed{4h}$

$f'(3) = -$ $\quad 4 \quad$ $f'(5) = +$

0 $\quad$ min $\quad$ 6,25h

Crece $(4, 6{,}25)$

Decrece $(0, 4)$

distancia min en $t=4 \Rightarrow f(4) = \boxed{150\,km}$ distancia mínima

El máximo estará en los extremos es decir en $t=0$ o en $t=6{,}25$

$\boxed{f(0) = 250\,km} \Rightarrow$ la distancia máxima se produce en el instante inicial

$f(6{,}25) = 187{,}5\,km$