Corrección del examen de **Matemáticas** Selectividad Junio 2019 **Andalucía**

¡¡¡LO HEMOS VUELTO A CONSEGUIR!!!

La segunda edición del libro "Unas Matemáticas Para Todos" ha respondido al 100% de las preguntas de ambas opciones en el examen de Matemáticas de Selectividad 2019 de Andalucía

Os dejo la corrección de mi genial compañero y co-autor de "Unas Matemáticas Para Todos"- Sergio Castro (Profesor10deMates).

Estamos MUY orgullosos de la ayuda que nuestro libro "Unas Matemáticas para Todos" ha prestado a esta comunidad y seguiremos trabajando en mejorarlo todo lo posible. Aprovechamos la ocasión para dar las gracias a aquellas personas que se han animado a estudiar con esta metodología y muy especialmente a nuestros alumnos de Academia Osorio Granada y cursos por España. Vuestros mensajes de agradecimiento y apoyo a esta labor han sido muy importantes. La mejor recompensa es ser testigo de cómo conseguís mejorar vuestras notas y alcanzar todas vuestras metas académicas ☺

Academia Osorio continuará su enseñanza especializada en Química, Matemáticas y Biología, así como el lanzamiento en Septiembre de la siguiente edición de los libros "Una Química para Todos" , "Unas Matemáticas para Todos"y "Una Biología Para Todos" que incluirá todas las actualizaciones, novedades y mejoras para el curso 2019/2020 con el objetivo de hacerlo lo más completo posible y seguir cumpliendo su meta de obtener las mejores calificaciones, facilitando el entendimiento de estas materias.

www.unaquimicaparatodos.com

Atentamente, vuestros amigos y vecinos:

Pablo Osorio Lupiáñez // Sergio Castro // Eduardo Kayser

OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Considera la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2+3x+4}{2x+2} \quad \text{para} \quad x \neq -1.$$

(a) **[1,5 puntos]** Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.

(b) **[1 punto]** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

E1A Andalucía Junio 2019

$f(x) = \dfrac{x^2+3x+4}{2x+2}$

$2x+2=0$ $\boxed{x=-1}$ $\boxed{Dom\, f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}}$

Asíntota Vertical en $x=-1$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+3x+4}{2x+2} = \frac{2}{0} \begin{cases} \lim_{x\to -1^-} \frac{+}{-} = -\infty \\ \lim_{x\to -1^+} \frac{+}{+} = +\infty \end{cases}$$

$\boxed{AV \text{ en } x=-1}$

Asíntota Horizontal:

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x+4}{2x+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \infty$$ $\boxed{\text{No tiene AH}}$

Asíntota Oblicua: $\boxed{y = mx+n}$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2+3x+4}{2x+2}}{\frac{x}{1}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x+4}{2x^2+2x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 1/2$$ $\boxed{m = 1/2}$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - mx] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2+3x+4}{2x+2} - \frac{x}{2}\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2+3x+4}{2(x+1)} - \frac{x}{2}\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2+3x+4}{2(x+1)} - \frac{x(x+1)}{2(x+1)}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x+4-x^2-x}{2(x+1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+4}{2x+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{2}{2} = 1$$ $\boxed{n=1}$

luego $\boxed{AO \mid y = 1/2\, x + 1}$

1 A

b) $f(x) = \frac{x^2+3x+4}{2x+2}$ $\qquad$ $Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(2x+2) - (x^2+3x+4)\cdot 2}{(2x+2)^2} = \frac{4x^2+4x+6x+6-2x^2-6x-8}{(2x+2)^2} =$$

$$= \boxed{\frac{2x^2+4x-2}{(2x+2)^2}} \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2x^2+4x-2}{(2x+2)^2}=0$$

$$2x^2+4x-2=0 \qquad x = \frac{-4\pm\sqrt{(4)^2-4\cdot(2)(2)}}{2\cdot 2} = \frac{-4\pm\sqrt{32}}{4} =$$

$$= \frac{-4\pm 4\sqrt{2}}{4} \to \boxed{\begin{array}{l} -1-\sqrt{2} \simeq -2{,}41 \\ -1+\sqrt{2} \simeq 0{,}41 \end{array}}$$

$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
	$f'(-3)=+$		$f'(-2)=-$		$f'(0)=-$		$f'(1)=+$	
	↗		↘		↘		↗	

Creciente $(-\infty, -1-\sqrt{2}) \cup (-1+\sqrt{2}, +\infty)$

Decreciente $(-1-\sqrt{2}, -1) \cup (-1, -1+\sqrt{2})$

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Sea la función $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1,1)$. (Sugerencia: cambio de variable $t = e^x$).

$\boxed{2B}$ Junio 2019

Primitiva de $f(x) = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$ pasa por $P(1,1)$ $(t = e^x)$

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx = \int \frac{1+t}{1-t}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{t+1}{-t^2+t}\,dt = \int \frac{t+1}{-1(t^2-t)}\,dt$$

$e^x = t$

$e^x\,dx = dt$

$dx = \dfrac{dt}{e^x} = \dfrac{dt}{t}$

$$= \int \frac{-t-1}{t^2-t}\,dt = \int \frac{A}{t}\,dt + \int \frac{B}{(t-1)}\,dx \overset{(*)}{=}$$

$t^2 - t = 0$

$t(t-1) = 0$

$\boxed{t=0}$ $\boxed{t=1}$

$$= \int \frac{1}{t}\,dt + \int \frac{-2}{t-1}\,dt = \ln|t| - 2\ln|t-1| \overset{\text{Deshacemos el CV}}{=} \ln|e^x| - 2\ln|e^x-1| + C$$

Pasa por $P(1,1) \Rightarrow f(1) = 1$

$\ln|e^1| - 2\ln|e^1-1| + C = 1$

$C = 1 - \ln(e) + 2\ln(e-1)$

$C = 1 - 1 + 2\ln(e-1)$

$\boxed{C = 2\ln(e-1)}$

$$\boxed{F(x) = \ln|e^x| - 2\ln|e^x-1| + 2\ln|e-1| = x - 2\ln|e^x-1| + 2\ln|e-1|}$$

(*) $\dfrac{-t-1}{t(t-1)} = \dfrac{A(t-1)}{t(t-1)} + \dfrac{Bt}{t(t-1)}$

Si $t=0$: $-1 = -A$ $\quad \boxed{A=1}$

Si $t=+1$: $-2 = B$ $\quad \boxed{B=-2}$

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a + d = 1$, tienen determinante 1 y cumplen $AX = XA$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3 A Junio 2019 Andalucía

$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad a+d=1 \quad |X|=1 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad AX = XA$

$|X| = 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \boxed{a\cdot d - c\cdot b = 1}$

$A\cdot X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}$

$X\cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$

Como $AX = XA \Rightarrow \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{-c = b} \ \boxed{+d = +a} \ \boxed{a = d} \ \boxed{b = -c}$

luego tenemos 4 ecuaciones

$\left.\begin{array}{l} b = -c \\ a = d \\ a+d = 1 \\ a\cdot d - c\cdot b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a + a = 1 \quad 2a = 1 \quad \boxed{a = 1/2} \ \boxed{d = 1/2}$

ahora:

$\begin{array}{l} b = -c \\ a\cdot d - c\cdot b = 1 \end{array} \quad 1/2\cdot 1/2 - c(-c) = 1 \quad \frac{1}{4} + c^2 = 1 \quad c^2 = 1 - 1/4 \quad \boxed{c = \sqrt{3/4} = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}}$

Si $c = +\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad b = -\sqrt{3}/2$ $\quad$ luego tenemos 2 matrices

Si $c = -\sqrt{3}/2$ $\quad b = +\sqrt{3}/2$

$\boxed{X_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ +\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}} \quad \boxed{X_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & +\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$

Ejercicio 4.- Considera la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1 \equiv x = 0$ y $\pi_2 \equiv y = 0$.

(a) [1,25 puntos] Halla los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2.

(b) [1,25 puntos] Determina la posición relativa de la recta r y la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

4A Junio 2019

$r: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ $\quad \pi_1 \; x=0 \quad \pi_2 \; y=0$

Puntos de la recta que equidistan de π_1 y π_2 $\Rightarrow$ Punto genérico

$$r \equiv \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 2+3\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \qquad \boxed{P_g(2-\lambda,\ 2+3\lambda,\ 1+\lambda)}$$

$$d(P_g, \pi_1) = d(P_g, \pi_2)$$

$$d(P_g, \pi_1) = \frac{|2-\lambda|}{1}$$

$$d(P_g, \pi_2) = \frac{|2+3\lambda|}{1}$$

$$|2-\lambda| = |2+3\lambda| \begin{cases} 2-\lambda = 2+3\lambda \\ -4\lambda = 0 \quad \boxed{\lambda = 0} \\ 2-\lambda = -2-3\lambda \\ 2\lambda = -4 \\ \boxed{\lambda = -2} \end{cases}$$

luego para $\lambda = 0 \Rightarrow P_1 \begin{cases} x = 2-0 \\ y = 2+3\cdot 0 \\ z = 1+0 \end{cases}$ $\quad \boxed{P_1(2,2,1)}$

luego para $\lambda = -1/2 \Rightarrow P_2 \begin{cases} x = 2-(-2) = 4 \\ y = 2+3(-2) = -4 \\ z = 1+(-2) = -1 \end{cases}$ $\quad \boxed{P_2(4,-4,-1)}$

b) Intersección π_1 y π_2 $\Rightarrow$ $\boxed{s \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases} \quad P_s(0,0,0) \quad \vec{v}_s(0,0,1)}$

$\vec{P_rP_s} = P_s - P_r = (-2,-2,-1)$

Posición relativa entre rectas:

$$A^* = \begin{pmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \\ \vec{P_rP_s} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \end{pmatrix}$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-6) - (+2) = -8 \neq 0 \qquad \boxed{rg(A^*) = 3}$$

$\boxed{\text{las rectas se cruzan}}$

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x-a)e^x$.

(a) **[1,25 puntos]** Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x=0$.

(b) **[1,25 puntos]** Para $a=1$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f.

1B Junio 2019 Andalucía Mates II

$f(x)=(x-a)\cdot e^x$

a) $f'(0)=0$

$f'(x)=1\,e^x+(x-a)\cdot e^x=e^x[1+x-a]=e^x[x-a+1]$

$\boxed{f'(0)=0} \Rightarrow e^x\,(0-a+1)=0 \begin{cases} e^x\neq 0 & \text{No solución} \\ -a+1=0 & \boxed{a=1} \end{cases}$

b) $a=1$

$f(x)=(x-1)\cdot e^x \qquad \text{Dom}\, f(x)\equiv\mathbb{R}$

$f'(x)=1\,e^x+(x-1)\,e^x=e^x(1+x-1)=e^x\cdot x=x\cdot e^x$

$f''(x)=1\cdot e^x+x\cdot e^x=e^x(1+x)=e^x(x+1)=0$

$\begin{cases} e^x=0 & \text{No } \exists\, \emptyset \\ x+1=0 & \boxed{x=-1} \end{cases}$

$-\infty$ ——— -1 ——— $+\infty$

$f''(-2)=-$ ⋂ ; $f''(0)=+$ ⋃

PI en $x=-1$

PI en $x=-1$

$(-1,\ f(-1))=(-1,\ -2e^{-1})\simeq\boxed{(-1,\ -0{,}73)}$

$f(-1)=(-1-1)\,e^{-1}=-2e^{-1}\simeq\boxed{-0{,}73}$

Ejercicio 2.- Considera la funciones $f\colon (-2,+\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \ln(x+2)$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano) y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \dfrac{1}{2}(x-3)$.

(a) **[1 punto]** Esboza el recinto que determinan la gráfica de f, la gráfica de g, la recta $x=1$ y la recta $x=3$. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas).

(b) **[1,5 puntos]** Determina el área del recinto anterior.

2B Andalucía Junio 2019 Mate II

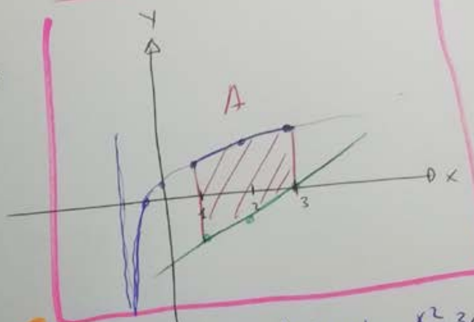
$f(x) = \ln(x+2)$ Dom $(-2, +\infty)$

$g(x) = \frac{1}{2}(x-3) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$

a) recinto entre $x=1$ y $x=3$

x	$f(x)=\ln(x+2)$
-2	$-\infty$
-1	0
0	
1	$\ln(3) \simeq 1{,}10$
2	$\ln(4) \simeq 1{,}39$
3	$\ln(5) \simeq 1{,}61$

x	$g(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$
1	-1
2	$-0{,}5$
3	0



b) $A = \int_1^3 \left[\ln(x+2) - \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right)\right] dx \overset{(*)}{=} \left[x \cdot \ln|x+2| - x + 2\ln|x+2| - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x\right]_1^3$

$= \left[3 \cdot \ln|3+2| - 3 + 2 \cdot \ln|3+2| - \frac{(3)^2}{4} + \frac{3}{2}(3)\right] - \left[1 \cdot \ln|1+2| - 1 + 2\ln|1+2| - \frac{(1)^2}{4} + \frac{3}{2}(1)\right]$

$= \left[5 \cdot \ln|5| - \frac{3}{4}\right] - \left[3 \cdot \ln(3) + \frac{1}{4}\right] = \boxed{5\ln(5) - 3\ln(3) - 1 \simeq 3{,}75\ u^2}$

(*) Calculo aparte

$\int 1 \cdot \ln(x+2)\, dx = x\ln(x+2) - \underbrace{\int \frac{x}{x+2}\, dx}_{I_2} \overset{(*)}{=} x \cdot \ln|x+2| - x + 2\ln|x+2|$

$u = \ln(x+2) \longrightarrow du = \frac{1}{x+2} dx$

$dv = 1\, dx \longrightarrow v = \int 1\, dx = x$

$I_2 = (*) \int \frac{x}{x+2}\, dx = \int 1 + \frac{-2}{x+2}\, dx =$

$$\begin{array}{r|l} x & x+2 \\ \cline{2-2} -x-2 & 1 \\ \hline -2 & \end{array}$$

$= x - 2\ln|x+2|$

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$,

considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $X^t A = B^t$, donde X^t, B^t denotan las traspuestas. Discútelo según los distintos valores de m.

$\boxed{3B}$ Junio 2019 Mate II Andalucía

$A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$

$X^t \cdot A = B^t$

$(x \ y \ z) \cdot \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} = (2m^2-1 \quad m \quad 1)$

$X^t_{1\times3} \cdot A_{3\times3} = S_{1\times3}$

$\left((2-m)x + y + mz \quad x + ym + z \quad (2m-1)x + y + z\right) = (2m^2-1 \quad m \quad 1)$

luego el sistema quedará:

$$\left(\begin{array}{l} (2-m)x + y + mz = 2m^2-1 \\ x + my + z = m \\ (2m-1)x + y + z = 1 \end{array}\right) \Rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2-m & 1 & m & 2m^2-1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 2m-1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2-m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 2m-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = [m(2-m) + (2m-1) + m] - [m^2(2m-1) + 2 - m + 1] =$$

$$= [2m - m^2 + 2m - 1 + m] - [2m^3 - m^2 + 2 - m + 1] = [-m^2 + 5m - 1] - [2m^3 - m^2 - m + 3]$$

$$= -2m^3 + 6m - 4$$

$\boxed{-2m^3 + 6m - 4 = 0}$

ruffini

	-2	0	6	-4
1		-2	-2	4
	-2	-2	4	$\boxed{0}$

$\Rightarrow -2m^2 - 2m + 4 = 0 \quad \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$

Si $m \neq 1$ y $m \neq -2$ $|A| \neq 0$ $rg(A) = 3 = rg(A^*) = $ nº incóg SCD

$\boxed{\text{Si } m=1 \quad |A|=0 \quad rg(A)=1=rg(A^*) \neq n \text{ Incg} \quad SCI}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\boxed{\text{Si } m=-2 \quad |A|=0 \quad rg(A)=2 \neq rg(A^*) \quad SI}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -8-1=-9 \neq 0 \quad rg(A)=2$$

¿$rg\, A^*$?

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & -2 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-8+10+7)-(70-8+1) = 9-63=-54 \neq 0 \quad rg(A^*)=3$$

Ejercicio 4.- Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,1,0)$, $B(1,0,2)$ y $C(0,2,1)$.

(a) **[1,25 puntos]** Halla el área de dicho triángulo.

(b) **[1,25 puntos]** Calcula el coseno del ángulo en el vértice A.

4B Mate II Junio 2019 Andalucía

$A(1,1,0)$ $B(1,0,2)$ $C(0,2,1)$

$$\text{Area} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2}$$

$\vec{AB} = B - A = (0,-1,2)$

$\vec{AC} = C - A = (-1,1,1)$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-\vec{i} - 2\vec{j} + 0\vec{k}) - (\vec{k} + 2\vec{i} + 0\vec{j}) =$$

$$= -3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} = \boxed{(-3,-2,-1)}$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \boxed{\sqrt{14}}$$

$$\boxed{\text{Area} = \frac{\sqrt{14}}{2}\ u^2}$$

$$\text{b)}\ \cos(\hat{A}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{15} \simeq 0{,}26$$

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (0,-1,2)(-1,1,1) = (0 - 1 + 2 = 1$

$|\vec{AB}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$

$|\vec{AC}| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (1)^2}$