Corrección del examen de **Matemáticas** Selectividad Junio 2018 **Andalucía**

¡¡¡LO HEMOS CONSEGUIDO!!!

El libro “Unas Matemáticas Para Todos” ha conseguido responder al 100% de preguntas de ambas opciones en el examen de Matemáticas Selectividad 2018 de ANDALUCÍA

Estamos muy orgullosos de poder decir que la primera edición del libro “Unas Matemáticas para Todos” ha conseguido responder a todas las preguntas de Selectividad en esta comunidad, hasta el punto de que estas soluciones son un “copia y pega” de los procedimientos, razonamientos y ejercicios del libro.

Aprovechamos la ocasión para dar las gracias a todas aquellas personas que se han animado a estudiar con esta metodología y a todos los alumnos de nuestras academias y cursos por España. Todos vuestros mensajes de agradecimiento y apoyo a esta labor han sido muy importantes para nosotros. La mejor recompensa es ver como conseguís mejorar vuestras notas y alcanzar todas vuestras metas académicas ☺ ☺

Academia Osorio continuará su enseñanza especializada en Química y Matemáticas y el lanzamiento en Septiembre de la siguiente edición de los libros “Una Química para Todos” y “Unas Matemáticas para Todos” que incluirá todas las actualizaciones, novedades y mejoras para el curso 2018/19 con el objetivo de hacerlo lo más completo posible y seguir cumpliendo su meta de obtener las mejores calificaciones, facilitando el entendimiento de estas materias.

www.unaquimicaparatodos.com

Atentamente, vuestros amigos y vecinos:

Sergio Castro // Pablo Osorio Lupiáñez // Eduardo Kayser

OPCIÓN A

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Halla los coeficientes a, b y c sabiendo que la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x): x^3+ax^2+bx+c$ tiene en $x=1$ un punto de derivada nula que no es extremo relativo y que la gráfica de f pasa por el punto $(1,1)$.

Hay que recordar que un punto que anule la primera derivada, si no es un extremo relativo, implica que la segunda derivada en dicho punto también es cero.

$$\boldsymbol{f(x)=x^3+ax^2+bx+c}\begin{cases}\boldsymbol{f'(1)=0}\\ \boldsymbol{f''(1)=0}\\ \boldsymbol{f(1)=1}\end{cases}$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b\ \rightarrow\ \boldsymbol{f'(1)=0}\rightarrow\ 3(1)^2+2a(1)+b=0\ \rightarrow\ \boxed{\boldsymbol{3+2a+b=0}}$$

$$f''(x)=6x+2a\ \rightarrow\ \boldsymbol{f''(1)=0}\ \rightarrow\ 6(1)+2a=0\ \rightarrow\ 6+2a=0\rightarrow\boxed{\boldsymbol{a=-3}}$$

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c\ \rightarrow\ \boldsymbol{f(1)=1}\ \rightarrow\ \boxed{\boldsymbol{1+a+b+c=1}}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}3+2a+b=0 \quad \rightarrow \quad 3+2(-3)+b=0\ \rightarrow\boxed{\boldsymbol{b=3}}\\ \boxed{\boldsymbol{a=-3}}\\ 1+a+b+c=1\quad \rightarrow \quad 1+(-3)+(3)+c=1\ \rightarrow\boxed{\mathbf{c=0}}\end{cases}$$

$$\boxed{\textbf{Soluciones: }\begin{cases}\boldsymbol{a=-3}\\ \boldsymbol{b=3}\\ \mathbf{c=0}\end{cases}}$$

Ejercicio 2.- Considera las funciones f y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por:

$f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = |x^2 - 2x|$.

a) [1,25 puntos] Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g y calcula los puntos de corte de dichas gráficas.

b) [1,25 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g

a) Definimos, primero, $g(x) = |x^2 - 2x|$ como una función a trozos:

$$x^2 - 2x = 0 \;\to\; x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$-\infty$	$\oplus$ $x^2 - 2x$	0	$\ominus$ $-x^2 + 2x$	2	$\oplus$ $x^2 - 2x$	$+\infty$

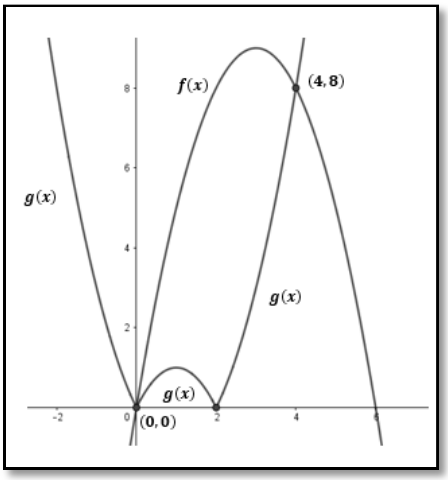
$$g(x) = |x^2 - 2x| \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si} \quad x \le 0 \\ -x^2 + 2x & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

Ahora buscamos los puntos de corte de f y g en cada trozo $\to f(x) = g(x)$

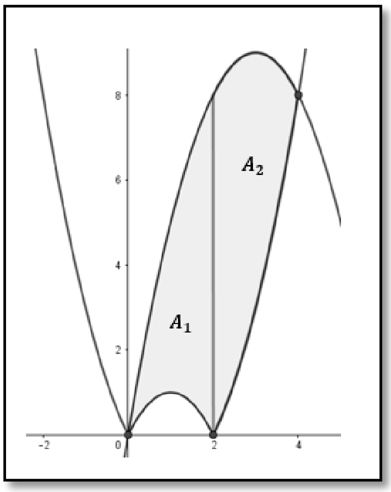
$$6x - x^2 = x^2 - 2x \;\to\; 2x^2 - 8x = 0 \;\to\; x(2x-8) \begin{cases} x = 0 \to (0,0) \\ x = 4 \to (4,8) \end{cases}$$

$$6x - x^2 = -x^2 + 2x \to 4x = 0 \;\to\; x = 0 \;\to\; (0,0)$$

El esbozo de la función será:



b) El área del recinto limitado por las gráficas de f y g será: $A = A_1 + A_2$



$$\boldsymbol{A = A_1 + A_2}$$

$$\boldsymbol{A_1} = \int_0^2 [(6x - x^2) - (-x^2 + 2x\ \ )]dx = \int_0^2 4xdx = [2x^2]_0^2 = F(2) - F(0) = 8 - 0 = \mathbf{8}$$

$$\boldsymbol{A_2} = \int_2^4 [(6x - x^2) - (x^2 - 2x\ \ )]\,dx = \int_2^4 (-2x^2 + 8x\ \ )\,dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + 4x^2\right]_2^4 =$$

$$= F(4) - F(2) = \frac{64}{3} - \frac{32}{3} = \mathbf{\frac{32}{3}}$$

$$\boldsymbol{A = A_1 + A_2 = 8 + \frac{32}{3} = \frac{56}{3}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A = \frac{56}{3}\ u^2}}$$

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + (m+3)z = 3 \\ x + y + z = 3m \\ 2x + 4y + 3(m+1)z = 8 \end{cases}$$

a) [1,75 puntos] Discútelo según los valores del parámetro m.

b) [0,75 puntos] Resuelve el sistema para $m = -2$

$$\boldsymbol{a})\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & (m+3) \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3(m+1) \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & (m+3) & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3m \\ 2 & 4 & 3(m+1) & 8 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & (m+3) \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3(m+1) \end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = 3(m+1) + 4 + 4(m+3) - 2(m+3) - 4 - 6(m+1) = \boldsymbol{-m+3}$$

$$|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{0} \ \rightarrow\ -m+3 = 0 \ \rightarrow\ \boldsymbol{m = 3}$$

- Si $\boldsymbol{m \neq 3}$ $\ |\boldsymbol{A}| \neq \boldsymbol{0} \rightarrow \boldsymbol{Rg\ A = Rg\ A^* = 3}$

- Si $\boldsymbol{m = 3} \rightarrow |\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{0}$ $\begin{cases} |A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow Rg\ A = 2 \\ |A_1^*| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow Rg\ A^* = 3 \end{cases}$

Si $\boldsymbol{m \neq 3}$ $\ |\boldsymbol{A}| \neq \boldsymbol{0} \rightarrow \boldsymbol{Rg\ A = Rg\ A^* = 3} =$ **Nº de incognitas → S.C.D.**

Si $\boldsymbol{m = 3} \rightarrow |\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{0} \rightarrow \boldsymbol{Rg\ A \neq Rg\ A^*} \rightarrow$ **S.I.**

b) Para $\boldsymbol{m = -2}$ **el sistema es compatible determinado, lo resolveremos a través de Cramer:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -6 \\ 2 & 4 & -3 & 8 \end{array}\right) \qquad |\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{5}$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -6 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & -3 \end{pmatrix}}{|A|} = \frac{\boldsymbol{-73}}{\boldsymbol{5}} \ ; \ \boldsymbol{y} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}}{|A|} = \frac{45}{5} = \boldsymbol{9} \ ; \ \boldsymbol{z} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -6 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}}{|A|} = \frac{\boldsymbol{-2}}{\boldsymbol{5}}$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{-73}}{\boldsymbol{5}} \ ; \ \boldsymbol{y = 9} \ ; \ \boldsymbol{z} = \frac{\boldsymbol{-2}}{\boldsymbol{5}}$$

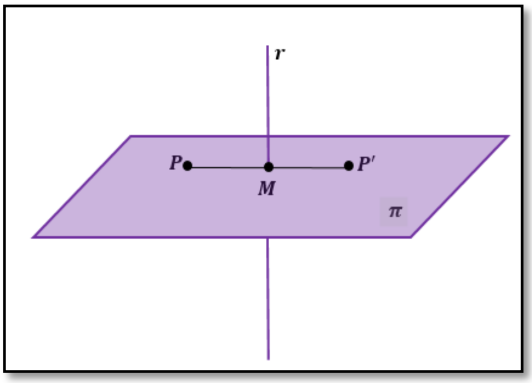
Ejercicio 4.- Considera los puntos $P(1,0,-1)$, $Q(2,1,1)$ y la recta r dada por:

$$x-5=y=\frac{z+2}{-2}$$

a) [1,25 puntos] Determina el punto simétrico de P respecto de r.

b) [1,25 puntos] Calcula el punto de r que equidista de P y Q.

a) Determinamos el punto simétrico de P respecto de r de la siguiente forma:



Para calcular el punto P' simétrico de P respecto de r, construimos un plano π, perpendicular a r y que pase por P. Después buscamos el punto M, punto de corte entre r y π, que será el punto medio del segmento PP', y aplicando definición de punto medio obtenemos P', que es el punto simétrico de P respecto la recta r

$$r\equiv x-5=y=\frac{z+2}{-2}\begin{cases}P_r(5,\ 0,-2)\\ \vec{v}_r(1,\ 1,-2)\end{cases}\ \rightarrow\ \boldsymbol{r}\equiv\begin{cases}\boldsymbol{x=5+t}\\ \boldsymbol{y=t}\\ \boldsymbol{z=-2-2t}\end{cases}\quad ;\quad \boldsymbol{P(1,\ 0,-1)}$$

Paso 1. Calculamos el plano π perpendicular a la recta r y que pase por P.
Como el plano es perpendicular a la recta, **el vector normal del plano coincidirá con el vector director de la recta: $\vec{n}_\pi=\vec{v}_r$**

$$\pi\begin{cases}\vec{n}_\pi=\vec{v}_r=(1,\ 1,-2)\\ P(1,\ 0,-1)\end{cases}\Rightarrow\quad \begin{aligned}&x+y-2z+D=0\\ &1\cdot(\mathbf{1})+1\cdot(\mathbf{0})-2\cdot(-\mathbf{1})+D=0\ \rightarrow\ \boldsymbol{D=-3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\pi\equiv x+y-2z-3\ =0}}$$

Paso 2. Calculamos el **punto de corte** a través de un **punto genérico** $\boldsymbol{M(x,\ y,\ z)}$ **de la recta:**

$$\boldsymbol{M(x,\ y,\ z)}\rightarrow\boxed{\boldsymbol{M(5+t\ ,t\ ,-2-2t)}}$$

Sustituimos dicho punto en el plano para calcular el parámetro y obtener M:

$$(5+t)+t-2(-2-2t)-3=0\rightarrow 6+6t=0\rightarrow \boldsymbol{t=-1}\rightarrow\boxed{\boldsymbol{M(4\ ,-1,\ 0)}}$$

Paso 3. Al ser M el punto medio del segmento formado por P y P', entonces podemos aplicar la fórmula de punto simétrico respecto a otro.

$$\boldsymbol{P'=2M-P}=2(4\ ,-1,\ 0)-(1,\ 0,-1)=(\mathbf{7},-\mathbf{2},\ \mathbf{1})$$

$$\boxed{\boldsymbol{P'=(7,-2,\ 1)}}$$

b) Calculamos el punto de r que equidista de P y Q.

$\boldsymbol{d(P,P_r) = d(Q,P_r)}$ **siendo** $\boldsymbol{P_r(5+t\ \ ,t\ ,-2-2t)}$ **punto genérico de la recta** $\boldsymbol{r}$**.**

Calculamos vector $\boldsymbol{\overrightarrow{PP_r}}$ **y vector** $\boldsymbol{\overrightarrow{QP_r}}$ **y procedemos a igualar sus módulos.**

$\boldsymbol{\overrightarrow{PP_r}} = P_r - P = (5+t\ \ ,t\ ,-2-2t) - (1,\ \ 0,-1) = \boldsymbol{(4+t,\ \ t,-1-2t)}$

$\boldsymbol{\overrightarrow{QP_r}} = P_r - Q = (5+t\ \ ,t\ ,-2-2t) - (2,\ \ 1,\ \ 1) = \boldsymbol{(3+t,\ \ t-1,-3-2t)}$

$\boldsymbol{d(P,P_r) = d(Q,P_r)} = |\boldsymbol{\overrightarrow{PP_r}}| = |\boldsymbol{\overrightarrow{QP_r}}|$

$\sqrt{(4+t)^2 + (t)^2 + (-1-2t)^2} = \sqrt{(3+t)^2 + (t-1)^2 + (-3-2t)^2}$

$(4+t)^2 + (t)^2 + (-1-2t)^2 = (3+t)^2 + (t-1)^2 + (-3-2t)^2;$

$16 + 8t + \cancel{t^2} + \cancel{t^2} + 4\cancel{t^2} + 4t + 1 = 9 + 6t + \cancel{t^2} + \cancel{t^2} - 2t + 1 + 9 + 12t + 4\cancel{t^2}\ ;$

$12t + 17 = 16t + 19 \ \ \rightarrow \ \ 4t = -2 \ \ \rightarrow \ \ \boldsymbol{t = -1/2}$

Sustituimos en el punto genérico:

$P_r(5+t\ \ ,t\ ,-2-2t) \ \rightarrow \ P_r\left(5-\frac{1}{2}\,,\frac{-1}{2}\,,-2+1\right) \rightarrow \boxed{\boldsymbol{P_r\left(\frac{9}{2}\,,\frac{-1}{2}\,,-1\right)}}$

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Determina $k \neq 0$ sabiendo que la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)\begin{cases} 3 - kx^2 & Si\ x \leq 1 \\ \dfrac{2}{kx} & Si\ x > 1 \end{cases}$$

es derivable

Como el $\boldsymbol{Dom\ f(x)} = \mathbb{R}$ **, tendremos que estudiar la continuidad y la derivabilidad en $\boldsymbol{x = 1}$. Recuerda que para que $\boldsymbol{f(x)}$ sea derivable en un punto, tiene que ser continua en dicho punto:**

- Estudiamos la <u>continuidad</u> en $\boldsymbol{x = 1}$:

$$f(1) = 3 - k(1)^2 = 3 - k$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \ 3 - kx^2 = 3 - k(1)^2 = \boxed{\boldsymbol{3 - k}} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2}{kx} = \dfrac{2}{k(1)} = \boxed{\dfrac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{k}}} \end{cases}$$

Para que $\boldsymbol{f(x)}$ sea continua en $\boldsymbol{x = 1}$ se debe cumplir que:

$$\boxed{\boldsymbol{3 - k = \frac{2}{k}}}$$

$$3k - k^2 = 2$$

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

$$k = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2}$$

$$\boldsymbol{k = 2} \quad ; \quad \boldsymbol{k = 1}$$

- Estudiamos la <u>derivabilidad</u> en $\boldsymbol{x = 1}$:

$$f'(x)\begin{cases} -2kx & Si\ x < 1 \\ \dfrac{-2}{kx^2} & Si\ x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \ -2kx = -2k(1) = \boxed{\boldsymbol{-2k}} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-2}{kx^2} = \dfrac{-2}{k(1)^2} = \boxed{\dfrac{\boldsymbol{-2}}{\boldsymbol{k}}} \end{cases}$$

Para que $\boldsymbol{f(x)}$ sea derivable en $\boldsymbol{x = 1}$ se debe cumplir que:

$$\boxed{\boldsymbol{-2k = \frac{-2}{k}}}$$

$$-2k^2 = -2$$

$$k^2 = 1$$

$$\boldsymbol{k = -1} \quad ; \quad \boldsymbol{k = 1}$$

<u>Conclusión:</u>

Para $\boldsymbol{k = 1}$, $\boldsymbol{f(x)}$ **es derivable, ya que para este valor hemos demostrado su continuidad mientras que para $\boldsymbol{k = -1}$ no era continua.**

Ejercicio 2.- Considera las funciones f y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

$f(x) = -\dfrac{x^2}{4} \quad ; \quad g(x) = 3 - x^2$

a) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$ y comprueba que también es tangente a la gráfica de g. Determina el punto de tangencia con la gráfica de g.

b) [0,75 puntos] Esboza el recinto limitado por la recta $y = 4 - 2x$ y las gráficas de f y g. Calcula todos los puntos de corte entre las gráficas (y la recta).

c) [0,75 puntos] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

a) ***Ponte en la situación hipotética de que a los 20 minutos de examen, te dicen que intercambies los nombres de las funciones f y g… Bien… Nos ponemos en ese caso:***

$$f(x) = -\frac{x^2}{4} \quad ; \quad g(x) = 3 - x^2 \;\to\; \boxed{\boldsymbol{g(x) = -\frac{x^2}{4} \quad ; \quad f(x) = 3 - x^2}}$$

- Calcula la ecuación de la recta tangente:

Expresamos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 1$, en su forma punto-pendiente: $\boldsymbol{y - f(1) = f'(1)(x-1)}$

Calculamos $\boldsymbol{f(1)}$, $\boldsymbol{f'(1)}$ y sustituimos:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{f(1) = 3 - (1)^2 = 2} \\ \boldsymbol{f'(x) = -2x \to f'(1) = -2} \end{array}\right\} \to \boxed{\boldsymbol{y - 2 = -2(x-1) \;\to\; y = -2x + 4}}$$

Para comprobar que la recta $\boldsymbol{y = -2x + 4}$ también es tangente a $\boldsymbol{g}$ habrá que igualar las dos funciones y si la solución es única podremos decir que $\boldsymbol{y = -2x + 4}$ también es tangente a $\boldsymbol{g}$.

$$\boldsymbol{g(x) = y} \to -\frac{x^2}{4} = -2x + 4 \to -x^2 = -8x + 16 \to x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = \frac{8}{2} = \boldsymbol{4} \to \boxed{\text{Solución única}}$$

$$\boxed{\textbf{La recta } \boldsymbol{y = -2x + 4} \textbf{ también es tangente a } \boldsymbol{g(x)} \textbf{ en el punto } \boldsymbol{x = 4 \to (4, -4)}}$$

Nota: ***En el hipotético caso de que no os hubieran dicho de intercambiar el nombre de las funciones, la recta tangente a la gráfica de $\boldsymbol{f}$ en el punto de abscisa $\boldsymbol{x = 1}$ no sería tangente a la gráfica de $\boldsymbol{g}$. Luego no tiene punto de tangencia…***

Nuestros ánimos a todos aquellos que se hayan visto afectados por este cambio y se hayan sentido más perdidos que un uracilo en una fiesta de ADN… Sabemos que ello ha supuesto una gran pérdida de tiempo y esperamos que sepan valorarlo a la hora de corregir…

b) Para el esbozo del recinto nos fijaremos en que las dos funciones son parábolas cóncavas y calcularemos el punto de corte entre f y g asi como los puntos de corte de cada gráfica con la recta $y = -2x + 4$, que da la casualidad que es la recta tangente a las dos funciones en el punto $(1, 2)$ y en $(4, -4)$

$$f(x) = g(x) \to 3 - x^2 = -\frac{x^2}{4} \to 12 - 4x^2 = -x^2 \to 3x^2 = 12 \begin{cases} \boldsymbol{x = 2} \to (\boldsymbol{2, -1}) \\ \boldsymbol{x = -2} \to (\boldsymbol{-2, -1}) \end{cases}$$

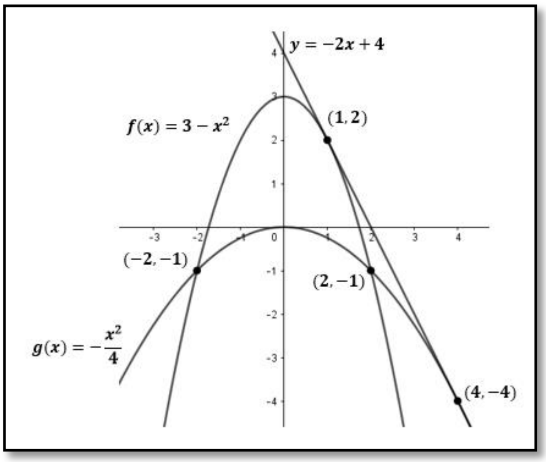
$$f(x) = y \to 3 - x^2 = -2x + 4 \to x^2 - 2x + 1 = 0 \to (x-1)^2 = 0 \to x = 1 \to (\boldsymbol{1, 2})$$

(Ya lo sabíamos)

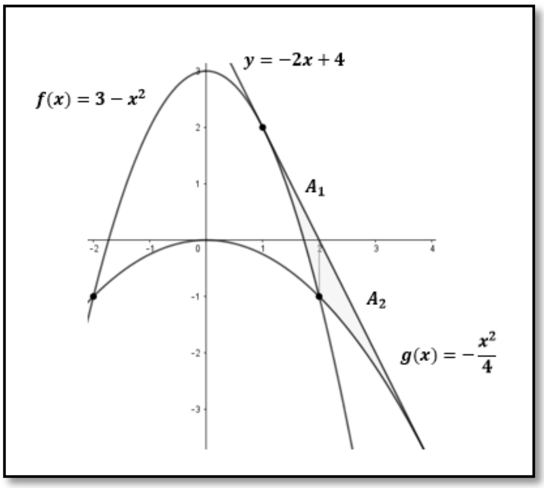
$$g(x) = y \to -\frac{x^2}{4} = -2x + 4 \to x^2 - 8x + 16 = 0 \to (x-4)^2 = 0 \to x = 4 \to (\boldsymbol{4, -4})$$

(Ya lo sabíamos)

El esbozo del reciento será:



c) El área del recinto limitado por las gráficas de f y g y la recta será: $A = A_1 + A_2$



$$\boxed{A = A_1 + A_2}$$

$$A_1 = \int_1^2 [(-2x+4) - (3 - x^2)]dx = \int_1^2 (x^2 - 2x + 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_1^2 = F(2) - F(1) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

$$A_2 = \int_2^4 \left[(-2x+4) - \left(-\frac{x^2}{4}\right)\right]dx = \int_2^4 \left(\frac{x^2}{4} - 2x + 4\right)dx = \left[\frac{x^3}{12} - x^2 + 4x\right]_2^4 = F(4) - F(2) = \frac{16}{3} - \frac{14}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} \to \boxed{\boldsymbol{A = 1\, u^2}}$$

Ejercicio 3.- a) [1,5 puntos] Justifica que es posible hacer un pago de 34,50 euros cumpliendo las siguientes restricciones:

* Utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euro, de 1 euros y de 2 euros;

* Se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas;

* Tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros juntas.

¿De cuántas maneras y con cuántas monedas de cada tipo se puede hacer el pago?

b) [1punto] Si se redondea la cantidad a pagar a 35 euros, justifica si es posible o no seguir haciendo el pago bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior.

a)

1. Definimos las incógnitas:

x = **Moneda de 0,5 euros**

y = **Moneda de 1 euro**

z = **Moneda de 2 euros**

2. Planteamos las ecuaciones:

$\mathbf{0,5\,x + y + 2z = 34,50}$

$\mathbf{x + y + z = 30}$

$\mathbf{y = x + z}$

3. Ordenamos las ecuaciones. Podemos multiplicar E_1 por 10 y cambiar el orden:

$$\begin{cases} 0{,}5x & +y & +2z & = & 34{,}50 \\ x & +y & +z & = & 30 \\ -x & +y & -z & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & +y & +z & = & 30 \\ -x & +y & -z & = & 0 \\ 5x & +10y & +20z & = & 345 \end{cases}$$

4. Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 30 & (E_1) \\ -x & +y & -z & = & 0 & (E_2) \\ 5x & +10y & +20z & = & 345 & (E_3) \end{cases} \xrightarrow{\boldsymbol{E_2'} = E_1 + E_2} \begin{cases} x & +y & +z & = & 30 \\ 0 & +2y & 0 & = & 30 \\ 5x & +10y & +20z & = & 345 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 30 & (E_1) \\ & 2y & & = & 30 & (E_2') \\ 5x & +10y & +20z & = & 345 & (E_3) \end{cases} \xrightarrow{\boldsymbol{E_3'} = E_3 - 5E_1} \begin{cases} x & +y & +z & = & 30 \\ & 2y & & = & 30 \\ 0 & +5y & +15z & = & 195 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 30 & 3) \\ & 2y & & = & 30 & 2) \\ & 5y & +15z & = & 195 & 1) \end{cases}$$

2) $2y = 30 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{y = 15}}$

3) $5y + 15z = 195 \rightarrow 5(15) + 15z = 195 \rightarrow 15z = 195 - 75 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{z = \frac{120}{15} = 8}}$

1) $x + y + z = 30 \rightarrow x = 30 - (15) - (8) \rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = 7}}$

Solución: 7 monedas de 0,5 euros, 15 monedas de 1 euro y 8 monedas de 2 euros

b)

2. Planteamos las ecuaciones con el nuevo dato:

$0{,}5\,x + y + 2z = \mathbf{35}$

$x + y + z = 30$

$y = x + z$

3. Ordenamos las ecuaciones. Podemos multiplicar E_1 por 10 y cambiar el orden:

$$\begin{cases} 0{,}5x & +y & +2z & = & 35 \\ x & +y & +z & = & 30 \\ -x & +y & -z & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & +y & +z & = & 30 \\ -x & +y & -z & = & 0 \\ 5x & +10y & +20z & = & 350 \end{cases}$$

4. Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 30 & (E_1) \\ -x & +y & -z & = & 0 & (E_2) \\ 5x & +10y & +20z & = & 350 & (E_3) \end{cases} \xrightarrow{\ \boldsymbol{E_2'} = E_1 + E_2\ } \begin{cases} x & +y & +z & = & 30 \\ 0 & +2y & 0 & = & 30 \\ 5x & +10y & +20z & = & 350 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 30 & (E_1) \\ & 2y & & = & 30 & (E_2') \\ 5x & +10y & +20z & = & 350 & (E_3) \end{cases} \xrightarrow{\ \boldsymbol{E_3'} = E_3 - 5E_1\ } \begin{cases} x & +y & +z & = & 30 \\ & 2y & & = & 30 \\ 0 & +5y & +15z & = & 200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 30 & 3) \\ & 2y & & = & 30 & 2) \\ & 5y & +15z & = & 200 & 1) \end{cases}$$

2) $2y = 30 \ \rightarrow \ \boxed{\boldsymbol{y = 15}}$

3) $5y + 15z = 200 \ \rightarrow 5(15) + 15z = 200 \rightarrow 15z = 200 - 75 \ \rightarrow \boxed{\boldsymbol{z = \frac{125}{15} = \frac{25}{3}}}$

1) $x + y + z = 30 \ \rightarrow \ x = 30 - (15) - \left(\frac{25}{3}\right) \rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = \frac{20}{3}}}$

Solución: No se podría realizar el pago con las condiciones anteriores ya que no podemos fraccionar las monedas

Ejercicio 4.- Considera el punto $P(2,-1,3)$ y el plano π de ecuación $3x\ +2y+x=5$.

a) [1,75 puntos] Calcula el punto simétrico de P respecto de π

b) [0,75 puntos] Calcula la distancia de P a π.

a) Paso 1. Calculamos la recta r perpendicular al plano π y que pase por P.
Como la recta es perpendicular al plano, **el vector director de la recta coincidirá con el vector normal del plano:** $\vec{v}_r=\vec{n}_\pi$

$$r\begin{cases}P(2,-1,3)\\ \vec{v}_r=\vec{n}_\pi=(3,\ 2,\ 1)\end{cases} \Rightarrow \quad r\equiv\begin{cases}\boldsymbol{x=2+3t}\\ \boldsymbol{y=-1+2t}\\ \boldsymbol{z=3+t}\end{cases}$$

Paso 2. Calculamos el <u>**punto de corte**</u> a través de un <u>**punto genérico**</u> $\boldsymbol{M(x,\ y,\ z)}$ **de la recta:**

$$\boldsymbol{M(x,\ \ y,\ \ z)}\ \rightarrow\ \boxed{\boldsymbol{M(2+3t,\ \ -1+2t,\ \ 3+t)}}$$

Sustituimos dicho punto en el <u>plano</u> para calcular el parámetro y obtener $\boldsymbol{M}$:

$$\boldsymbol{3}\cdot(2+3t)+\boldsymbol{2}\cdot(-1+2t)+\boldsymbol{1}\cdot(3+t)=\boldsymbol{5}\quad\rightarrow\quad 6+9t-2+4t+3+t-5=0\,;$$

$$14t+2=0\rightarrow t=-{}^{2}/_{14}\ \rightarrow\ \boldsymbol{t=-{}^{1}/_{7}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{M}\begin{cases}2+3(-{}^{1}/_{7})=\boldsymbol{{}^{11}/_{7}}\\ -1+2(-{}^{1}/_{7})=\boldsymbol{{}^{-9}/_{7}}\\ 3-{}^{1}/_{7}=\boldsymbol{{}^{20}/_{7}}\end{cases}} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{M}\left(\frac{11}{7},\ \frac{-9}{7},\ \frac{20}{7}\right)}$$

Paso 3. Al ser $\boldsymbol{M}$ el punto medio del segmento formado por $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{P'}$, entonces podemos aplicar la fórmula de punto simétrico respecto a otro.

$$\boxed{\boldsymbol{P'=2M-P}=2\cdot\left(\frac{11}{7},\ \frac{-9}{7},\ \frac{20}{7}\right)-(2,-1,\ \ 3)=\left(\boldsymbol{\frac{8}{7}},\ \boldsymbol{\frac{-11}{7}},\ \boldsymbol{\frac{19}{7}}\right)}$$

b) Podemos aplicar la fórmula directamente:

$$\boxed{\boldsymbol{d(P,\pi)}=\frac{|\boldsymbol{A\cdot P_x+B\cdot P_y+C\cdot P_z+D}|}{\sqrt{\boldsymbol{A^2+B^2+C^2}}}}=\frac{|\boldsymbol{3}\cdot\boldsymbol{(2)}+\boldsymbol{2}\cdot\boldsymbol{(-1)}+\boldsymbol{1}\cdot\boldsymbol{(3)}-\boldsymbol{5}|}{\sqrt{\boldsymbol{(3)^2+(2)^2+(1)^2}}}=\frac{|\boldsymbol{2}|}{\sqrt{\boldsymbol{14}}}=\frac{\boldsymbol{2}}{\sqrt{\boldsymbol{14}}}\,\boldsymbol{u}$$

Podemos racionalizar para simplificarlo $\Rightarrow$ $\boldsymbol{d(P,\pi)}=\dfrac{\boldsymbol{2}}{\sqrt{\boldsymbol{14}}}=\dfrac{2\cdot\sqrt{14}}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}}=\dfrac{2\cdot\sqrt{14}}{14}=\dfrac{\sqrt{\boldsymbol{14}}}{\boldsymbol{7}}\,\boldsymbol{u}$